1.1 Der Kreis

<u>Der Kreis</u>
Umfang $U = 2r\pi$
Flächeninhalt $A = r^2\pi$

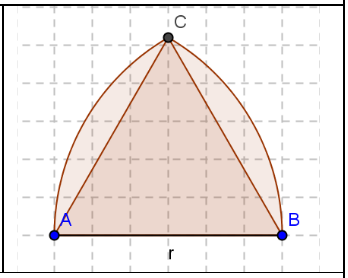
Wie ändert sich der Flächeninhalt eines Kreises, wenn der Radius verdoppelt wird? (*Lösung: vervierfacht*)

<u>Der Kreissektor (Kreisausschnitt) mit Mittelpunktswinkel α</u>
Bogenlänge $b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2r\pi$
Flächeninhalt $A_{Sektor} = A_S = \frac{\alpha}{360°} \cdot r^2\pi$

Berechne Umfang und Flächeninhalt des Spitzbogens mit $r = 1{,}5m$
Lösung:

$$u = 2b + r = (\pi + 1{,}5)\ m$$

$$A = 2A_S - A_D = \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{9}{16}\sqrt{3}\right) m^2$$



<u>Das Bogenmaß φ_{RAD}</u> eines Winkels φ_{DEG} im Gradmaß ist die Länge des zugehörigen Bogens im Einheitskreis:

$$\varphi_{RAD} = \frac{\varphi_{DEG}}{180°} \cdot \pi$$

Besondere Werte:

φ_{DEG}	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
φ_{RAD}	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

1.2 Die Kugel

<u>Oberflächeninhalt</u> $O_{Kugel} = 4r^2\pi$
<u>Volumen</u> $V_{Kugel} = \frac{4}{3}r^3\pi$

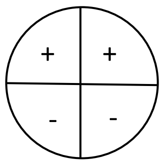
Wie muss der Radius einer Kugel verändert werden, wenn ihr Volumen 27mal so groß werden soll? Wie verändert sich dann der Oberflächeninhalt (*Lösung:* $3r; 9O$)

2 Geometrische und funktionale Aspekte der Trigonometrie

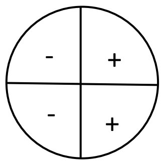
<u>Sinus und Kosinus am Einheitskreis</u>
Die Werte von Sinus und Kosinus für beliebige Winkel lassen sich aus den entsprechenden Werten für spitze Winkel ermitteln.

$$\sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha)$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$$
$$\sin(180° + \alpha) = -\sin(\alpha)$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos(\alpha)$$
$$\sin(360° - \alpha) = -\sin(\alpha)$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos(\alpha)$$

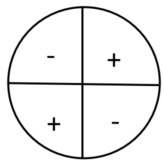
Sinus



Kosinus



Tangens



Bsp: Ermittle alle Winkel α zwischen 0° und 360° für die gilt: $\sin(\alpha) = 0{,}7$
TR: $\alpha_1 = sin^{-1}(0{,}7) = 44°$
(DEG) $\alpha_2 = 180° - 44° = 136°$

<u>Sinus- und Kosinussatz</u>
<u>Sinussatz</u>: In jedem Dreieck verhalten sich die Längen zweier Seiten wie die Sinuswerte ihrer Gegenwinkel:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$$

<u>Kosinussatz:</u> (Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras für beliebige Dreiecke):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

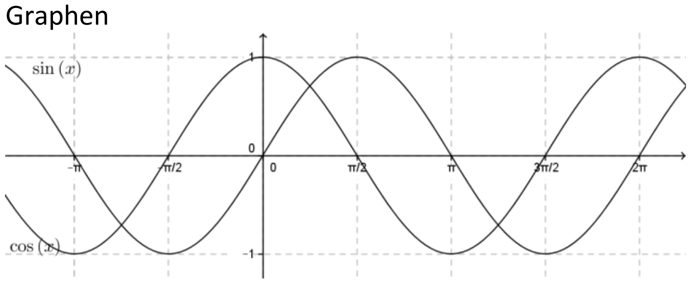
Beispiel: Im Dreieck ABC sind $a = 6cm, b = 7cm$, $c = 8cm$ gegeben.
Winkel γ:

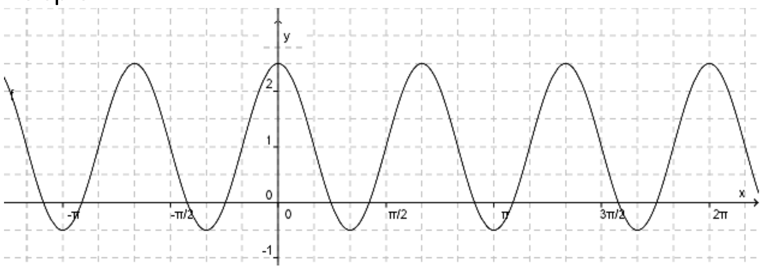
$$\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{36 + 49 - 64}{84} = 0{,}25$$
$$\Rightarrow \gamma = 75{,}5°$$

<u>Sinusfunktion</u>
$f(x) = \sin(x)$
Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$
Wertemenge $W = [-1; 1]$
Periode 2π:
$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
punktsymmetrisch zum Ursprung:
$\sin(-x) = -\sin(x)$

<u>Kosinusfunktion</u>
$f(x) = \cos(x)$
$D = \mathbb{R}$
$W = [-1; 1]$
Periode 2π:
$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
achsensymmetrisch zur y-Achse
$\cos(-x) = \cos(x)$

Graphen



Die allgemeine Sinuskurve	Beispiel:
$y = a \cdot \sin\big(b(x+c)\big) + d$ Ausgehend von der normalen Sinuskurve $y = \sin(x)$ gilt: • |a| ist die Amplitude. Bei negativem a wird noch an der x-Achse gespiegelt • d gibt die Verschiebung um +d in y-Richtung an. • b verändert die Periode: $p = \frac{2\pi}{\|b\|}$. Bei negativem b wird noch an der y-Achse gespiegelt • c gibt die Verschiebung um –c in x-Richtung an.	 $a = (2{,}5 + 0{,}5) : 2 = 1{,}5$ $d = 1$ Periode $p = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 1{,}5$ $c = \frac{\pi}{6}$ (oder $c = -\frac{\pi}{2}$) $\Rightarrow y = 1{,}5 \cdot \sin\left(1{,}5\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right) + 1$

3 Exponentielles Wachstum und Logarithmen

Exponentielles Wachstum	Beispiele:
$y = c \cdot a^x \ (a, c \in \mathbb{R}^+; a \neq 1)$ c: Anfangswert, a: Wachstumsfaktor falls $a > 1$: Zunahme, falls $a < 1$: Abnahme Im Gegensatz dazu: Lineares Wachstum: $y = c + a \cdot x$ Begriff bei exponentieller Abnahme: Die Zeitspanne, in der sich der Bestand halbiert, heißt Halbwertszeit t_H. $y = c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/t_H}$	a) Geldanlage mit Zinseszinsen: Verzinsung 3,5% pro Jahr , Anfangskapital 5000€ Betrag nach 20 Jahren Laufzeit: $y = 5000 \cdot 1{,}035^{20} = 9949[€]$ b) Luftdruck nimmt pro 1000m Höhendifferenz um 12% ab (nach oben). Auf Meereshöhe: 1013mbar Luftdruck in 10000m Höhe: $y = 1013 \cdot 0{,}88^{10} = 282[mbar]$
Allgemeine Exponentialfunkton $f(x) = a^x$ heißt Exponentialfunktion $g(x) = c \cdot a^x$ heißt allgemeine Exponentialfunktion	Beispiele: a) $f(x) = 4^x$ und $f(x) = 5^{2x} = 25^x$ b) $g(x) = 4 \cdot 3^x$ und $g(x) = 3^{x+2} = 9 \cdot 3^x$ Aufgabe: Wie geht $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$ aus 5^x hervor? Lösung: $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} = (5^{-1})^{2x} = 5^{-2x}$ Dieser Graph ist im Vergleich zum Graphen von 5^x mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung gestaucht sowie an der y-Achse gespiegelt.
Der Logarithmus Für $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $a \neq 1$ gilt: Der Logarithmus von b zur Basis a ist diejenige Zahl, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten: $a^x = b \ \Rightarrow x = \log_a b$ Merkregeln: $\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$; $\log_a \frac{1}{a} = -1$; $\log_a a^c = c$ Rechenregeln: $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ $\log_a(b : c) = \log_a b - \log_a c$ $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$ Schreibweise beim Zehnerlogarithmus: $\log_{10} x = \lg(x) = \log x$	Beispiele: $3^x = 81 \ \Rightarrow x = \log_3 81 = 4$ Beispiele: a) $\log_5 \sqrt{\frac{1}{5}} = \log_5 5^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$ b) $\log_5 0{,}04 = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$ c) $\log_a b^3 + \log_a \sqrt{b} = 3{,}5 \log_a b$

Exponentialgleichungen

In einer Exponentialgleichung tritt die Variable x nur im Exponenten auf.

Lösungsstrategien:

a) Gleichung umformen auf $a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$

b) Anwenden von $\lg(\ldots)$ auf beiden Seiten der Gleichung

c) Exponentenvergleich

Beispiele

a) $5 \cdot 2^x = 2{,}5 \cdot 3^x$

$\frac{5}{2{,}5} = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

$x = \log_{1{,}5} 2 \approx 1{,}71$

b) $2^{x+1} \cdot 72 = 3^x \mid lg \ldots$

$(x+1) \cdot \lg(2) + \lg(72) = x \cdot \lg(3)$

$x \cdot \lg(2) - x \cdot \lg(3) = -\lg(2) - \lg(72)$

$x = \frac{-\lg(2) - \lg(72)}{\lg(2) - \lg(3)} \approx 12{,}26$

c) $2^x \cdot 32 = 4^{x-3}$

$2^{x+5} = 2^{2x-6}$

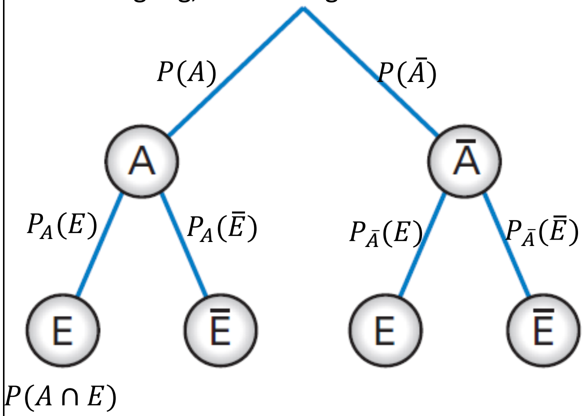
$x + 5 = 2x - 6$

$x = 11$

4 Zusammengesetzte Zufallsexperimente – Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$P_A(E)$ ist die Wahrscheinlichkeit von E unter der Bedingung, dass A eingetreten ist.



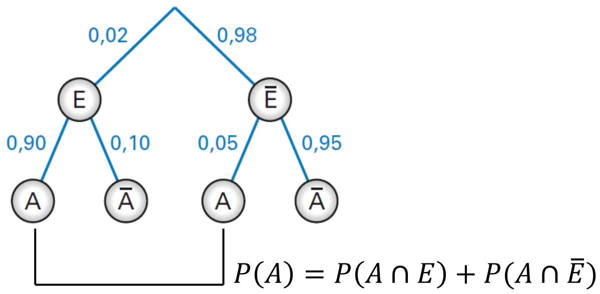
Berechnung:

$$P_A(E) = \frac{P(A \cap E)}{P(A)}$$

Beispiel: In einem Schmuckladen wird in 2% aller Nächte ein Einbruchsversuch (E) unternommen. In 90% dieser Fälle spricht die Alarmanlage an (A). Wenn in einer Nacht kein Einbruch vorliegt, wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% trotzdem eine Alarm ausgelöst.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich ein Einbruch stattfindet, wenn die Alarmanlage Alarm gegeben hat?

$$P_A(E) = \frac{P(A \cap E)}{P(A)} = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}90}{0{,}02 \cdot 0{,}90 + 0{,}98 \cdot 0{,}05} = 26{,}9\%$$



5 Ganzrationale Funktionen

Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

Funktionen der Form $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ heißen Potenzfunktion

Beispiele:

$f(x) = x^3$: punktsymmetrisch zum Ursprung (da Exponent ungerade, gilt: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$)

$f(x) = x^4$: achsensymmetrisch zur y-Achse (da Exponent gerade, gilt: $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$)

Ganzrationale Funktionen

Funktionen der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

mit $a_n \neq 0$ heißt ganzrationale Funktion n-ten Grades.

Beispiel:

$f(x) = -0{,}2x^3 + 2x - 5$ ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades

Bestimmen der Nullstellen ($f(x) = 0$)
Falls der Term als Summe gegeben ist (wie oben dargestellt, dann ist das Ziel, den Funktionsterm zu **faktorisieren**.

Verschiedene Fälle:

- Falls möglich (z.B. falls $a_0 = 0$) : **Ausklammern** einer möglichst hohen Potenz von x und dann weitere Verfahren anwenden (z.B. Lösungsformel)

Beispiele:

a) $f(x) = x^4 - 9x^2 = x^2(x^2 - 9) = x^2(x-3)(x+3) = 0$
(Zuerst x² ausklammern und dann 3. Binomische Formel)
Damit: $x_1 = 0, x_2 = 3;\ x_3 = -3$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - 6x = x(x^2 - x - 6) = 0$
$x_1 = 0$ sowie Anwenden Lösungsformel

$$x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$$
$$x_2 = 3;\ x_3 = -2$$

Damit faktorisierter Term: $f(x) = x(x-3)(x+2)$

- Falls kein Ausklammern möglich und Potenz größer gleich 3: eine Lösung durch „hinschauen“ und dann **Polynomdivision**

c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7x + 2 = 0$
1. Lösung durch probieren: $x_1 = 2$
Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 6x^2 + 7x + 2) : (x - 2) = x^2 - 4x - 1 \\
\underline{-(x\ \ - 2x^2)} \\
\quad -4x^2 + 7x \\
\quad \underline{-(-4x^2 + 8x)} \\
\qquad -x + 2 \\
\qquad \underline{-(x + 2)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

Lösungsformel liefert dann: $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{5}$
Damit faktorisierter Term:

$$f(x) = (x-2)(x-2-\sqrt{5})(x-2+\sqrt{5})$$

- Falls bereits der Term als ein Produkt gegeben ist, darf man den Term auf **keinen Fall** ausmultiplizieren, sondern liest die Lösungen einfach ab! Die Einzelnen Faktoren heißen Linearfaktoren.

Art der Nullstellen
Die Exponenten der Linearfaktoren geben die Art der Nullstelle an („Hoch 1“ bedeutet einfache Nullstelle, „Hoch 2“ bedeutet zweifache Nst. usw.)

- Einfache, dreifache, … Nullstellen besitzen einen Vorzeichenwechsel,
- Zweifache, vierfache, … besitzen **keinen** Vorzeichenwechsel

Beispiel:

$$f(x) = x^3 \cdot (x + 0{,}5) \cdot (x - 3)^2$$

$x_1 = 0$ (dreifach), $x_2 = -0{,}5$ (einfach), $x_3 = 3$ (doppelt)

x_1 und x_2 besitzen einen Vzw., d.h. sie schneiden (durchkreuzen) die x-Achse, x_3 hat keinen Vzw., d.h. die x-Achse wird berührt.

Vorzeichenbetrachtung
Vorzeichentabelle anhand der faktorisierten Form des Terms

	x<-0,5	-0,5<x<0	0<x<3	3<x
x+0,5	-	+	+	+
x^3	-	-	+	+
$(x-3)^2$	+	+	+	+
f(x)	+	-	+	+

Verhalten im Unendlichen: Ausschlaggebend ist der Term mit der höchsten Potenz von x in der ausmultiplizierten Form.

Beispiel:

$$f(x) = -0{,}2x^3 + 2x - 5$$

Auschlagegebend: $-0{,}2x^3$
f(x) geht gegen ∞ für x gegen $-\infty$
f(x) geht gegen $-\infty$ für x gegen ∞

6 **Vertiefen der Funktionenlehre**

<u>Überblick über gekannte Funktionentypen</u> • **Lineare Funktionen**: $y = mx + t$ Graph: Gerade mit Steigung m und Achsen-abschnitt t • **Quadratische Funktionen** Normalform: $y = ax^2 + bx + c$ Scheitelform: $y = a(x-d)^2 + e$ Graph: Parabel mit Öffnungsfaktor a und Scheitel S(d|e) • **Potenzfunktionen** mit natürlichen Exponenten $y = x^n$ • **Ganzrationale Funktionen** • **Gebrochen rationale Funktionen** Graph: Hyperbel Definitionsmenge: Grundmenge ohne Nullstellen des Nenners	Beispiele: • $y = 2x - 5$ Graph: Steigung 2 und Achsenabschnitt -5 • $y = 3(x+2)^2 - 3$ Scheitel: S(-2|-3) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die Normalform in die Scheitelform überführen • $y = x^5$ (punktsymmetrisch zum Ursprung, Nullstelle mit Vzw bei x=0) • $y = -3x^4 + 5x^2 + 2x$ $y = (x-2)^2(x+3)^3$ • $y = \frac{1}{x+1} - 2$ waagerechte Asymptote: $y = -2$ senkrechte Asymptote: $x = -1$
• **Trigonometrische Funktionen** $y = a \cdot \sin\big(b(x+c)\big) + d$ • **Allgemeine Exponentialfunktionen** $y = c \cdot a^x$ c: Startwert, a: Wachstumsfaktor	• $y = -3\sin\big(2(x-3)\big) - 2$ • $y = 3 \cdot 2^x$
<u>Grenzwerte: Verhalten im Unendlichen</u> • Konvergenz: Nähern sich die Funktionswerte $f(x)$ für $x \to \infty$ (bzw. $x \to -\infty$) der Zahl a beliebig genau, heißt Grenzwert (Limes) der Funktion f. Schreibweise: $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ • Divergenz: Wachsen die Funktionswerte $f(x)$ für $x \to \infty$ (bzw. $x \to -\infty$) unbegrenzt nach $+\infty$ oder sinken sie unbegrenzt nach $-\infty$, so divergiert die Funktion bestimmt. Es gibt auch Funktionen wir die Sinusfunktion, da gar keinen Grenzwert für $x \to \infty$ haben (unbestimmte Divergenz)	Beispiele: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2 - \underbrace{\left(\frac{1}{10}\right)^x}_{\to 0}\right) = 2$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2 \underbrace{- \underbrace{\left(\frac{1}{10}\right)^x}_{\to\infty}}_{-\infty}\right) = -\infty$ $f(x) = x \cdot \sin(x)$ schwankt ständig zwischen $-\infty$ und ∞ hin und her.
<u>Berechnung von Grenzwerten</u> • Bei ganzrationalen Funktionen: höchste Potenz ausklammern (diese entscheidet mit ihrer Vorzahl das Verhalten) • Bei gebrochen rationalen Funktionen im Zähler und Nenner jeweils die höchste Potenz ausklammern	Beispiele: • $\lim_{x\to\infty}(x^3 - x^2) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{x^3}_{\to\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{x}\right)}_{\to 1} = \infty$ • $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x}{1 + 2x^2} =$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x})}{x^2(\frac{1}{x^2}+2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 - \overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}}{(\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}+2} = \frac{1}{2}$

<u>Eigenschaften ausgewählter Graphen</u> • **Maximale Definitionsmenge**: Alle Werte für x, die in den Term eingesetzt werden dürfen • **Schnittpunkte mit Koordinatenachsen:** x-Achse (Nullstellen) : $f(x) = 0$ nach x auflösen y-Achse: $f(0)$ berechnen • **Symmetrieverhalten:** Achsensymmetrie zur y-Achse, falls $f(-x) = f(x)$ Punktsymmetrie zum Ursprung, falls $f(-x) = -f(x)$ • **Wertemenge:** Alle möglichen y-Werte (bzw. Funktionswerte), die herauskommen können	Beispiele: • $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ Die Definitionslücken sind die Nullstellen des Nenners, also: $D = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$ • $g(x) = \sqrt{x-2}$ Unter der Wurzel darf nichts Negatives stehen, also $D = [2;\ \infty[$ • $f(x) = 5^x - 2$ Nullstelle: $5^x - 2 = 0$ also $x = \log_5 2$ y-Achse: $f(0) = 5^0 - 2 = 1 - 2 = -1$ • $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin(x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x} = f(x)$ also achsensymmetrisch zur y-Achse • $g(x) = -x^5 + 2x^3 - x$ $g(-x) = -(-x)^5 + 2(-x)^3 - (-x) =$ $= x^5 - 2x^3 + x - (-x^5 + 2x^3 - x) = -f(x)$ also punktsymmetrisch zum Ursprung • $f(x) = -x^2 + 5 \quad \rightarrow W = [-\infty; 5]$ $g(x) = 5^x \quad \rightarrow W =]0;\ \infty[$
<u>Parameter verändern Funktionsgraphen</u> Man geht im Folgenden immer von einem beliebigen Funktionsterm $f(x)$ aus und erhält durch die Veränderung $g(x)$. • $g(x) = a \cdot f(x)$ **Streckung/Stauchung** mit Faktor |a| **in y-Richtung**. Falls $a < 0$, zusätzlich Spiegelung an der x-Achse. • $g(x) = f(x) + d$ **Verschiebung** um d **in y-Richtung** • $g(x) = f(b \cdot x)$ **Streckung/Stauchung** mit Faktor $\lvert\frac{1}{b}\rvert$ **in x-Richtung**. Falls $b < 0$, zusätzlich Spiegelung an der y-Achse. • $g(x) = f(x + c)$ **Verschiebung** um $-c$ **in x-Richtung**. • $g(x) = a \cdot f\big(b \cdot (x + c)\big) + d$ Treten mehrere Parameter gleichzeitig auf, gilt für die Reihenfolge: **Erst Strecken (und Spiegeln), dann verschieben**. Dabei ist es egal, ob diese Regel zuerst für die y-Richtung oder die x-Richtung angewandt wird.	Beispiele • $g(x) = 0{,}5x^2$ die Normalparabel $f(x) = x^2$ ist in y-Richtung gestaucht mit Faktor 0,5. • $g(x) = \frac{1}{x} + 2$ die „Standardhyperbel“ $f(x) = \frac{1}{x}$ ist um 2 nach oben verschoben • $g(x) = \sin(3x)$ die Funktion $f(x) = \sin(x)$ ist mit Faktor $\frac{1}{3}$ in x-Richtung gestaucht (d.h. die Schwingungsdauer ist $\frac{2\pi}{3}$) • $g(x) = 3^{x+2}$ die Funktion $f(x) = 3^x$ ist um -2 in x-Richtung verschoben (also 2 nach links) • $g(x) = -2\cos\big(4(x+5)\big) + 3$ die Funktion $f(x) = \cos(x)$ ist in y-Richtung gestreckt mit dem Faktor 2, an der x-Achse gespiegelt, um 3 nach oben verschoben, in x-Richtung um den Faktor $\frac{1}{4}$ gestaucht und um 5 nach links verschoben.