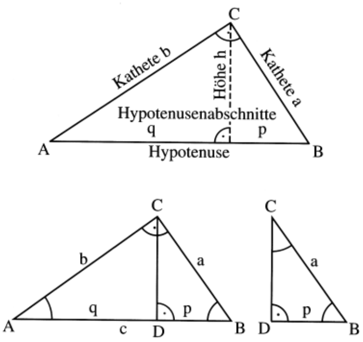
Grundwissen 9. Klasse

1) Rationale und irrationale Zahlen

Quadratwurzel $\sqrt{b}$ ist diejenige nichtnegative Zahl, die quadriert b ergibt: $\left(\sqrt{b}\right)^2 = b$ Die Zahl b heißt Radikand; $b \geq 0$: es gibt keine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl! Unterscheide dazu: Die Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl $s \geq 0$ ist die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^2 = s$ => $x_{1,2} = \pm\sqrt{s}$	$(\sqrt{5})^2 = 5$ $\sqrt{9} = 3$ aber: $\sqrt{-25} =$ nicht definiert! $s^2 = 25 \Leftrightarrow$ $s = \sqrt{25} = 5$ oder $s = -\sqrt{25} = -5$ $L = \{-5; 5\}$
Die Menge R der reellen Zahlen besteht aus - den rationalen Zahlen und - den irrationalen Zahlen	- sie lassen als endliche und unendliche periodische Dezimalzahlen darstellen; alle rationale Zahlen lassen sich als Bruch darstellen! - sie sind die unendlichen, nichtperiodischen Dezimalzahlen; Irrationale Zahlen sind nicht als Bruch darstellbar.
Umgang mit den Wurzeltermen: ➢ $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$ mit $x, y \geq 0$ ➢ $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$ mit $x \geq 0$ und $y > 0$	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{13} = \sqrt{26}$ $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$
<u>Radizieren von Wurzeltermen:</u> Wenn sich der Radikand so faktorisieren lässt, dass ein Faktor quadratisch ist, dann kann die Wurzel teilweise radiziert werden. Achtung: Binomische Formel!! ABER: Nie aus einer Summe/Differenz radizieren	$\sqrt{63} = \sqrt{9 \cdot 7} = \sqrt{3^2 \cdot 7} = 3\sqrt{7}$ $\sqrt{2x^2 + 4xy + 2y^2} = \sqrt{2(x+y)^2} = \|x+y\|\sqrt{2}$ ABER: $\sqrt{9x^2 + 16}$: hier ist keine Vereinfachung möglich
<u>Rationalmachen des Nenners:</u> Durch geeignetes Erweitern können Wurzeln aus dem Nenner beseitigt werden.	$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\frac{2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{2 \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) \cdot \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)} = \frac{2\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)}{x - y}$

2) Satzgruppe des Pythagoras

<u>Satz des Pythagoras:</u> In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat $a^2 + b^2 = c^2$ (a, b: Katheten, c: Hypothenuse) 	In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Katheten 3 LE bzw. 4 LE lang; wie lang ist die Hypothenuse? $3^2 + 4^2 = c^2$ $\Rightarrow c = 5$ LE In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypothenuse 5 LE und eine Kathete 2 LE; berechne die fehlende Kathete: $5^2 = 2^2 + b^2$ $b^2 = 5^2 - 2^2$ $\Rightarrow b^2 = 21$ $\Rightarrow b = \sqrt{21}$ LE
<u>Kathetensatz:</u> In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat einer Kathetenlänge gleich dem Produkt aus der Hypotenusenlänge und der Länge des anliegenden Hypotenusenabschnitts. $a^2 = c \cdot p$ $b^2 = c \cdot q$	In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Kathete a ist 6 LE lang; der Hyothenusenabschnitt p ist 2 LE; berechne die Länge der Hypothenuse? $6^2 = c \cdot 2$ $c = 18$ LE
<u>Höhensatz:</u> In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenusenhöhe gleich dem Produkt aus der Länge der beiden Hypotenusenabschnitte. $h^2 = p \cdot q$	Berechne den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mithilfe seiner Hypothenusenabschnitte p = 2 cm und q = 6 cm! $c = p + q \Rightarrow c = 8$ cm $h^2 = p \cdot q$ $h = \sqrt{2 \cdot 6}$ cm $h = 2\sqrt{3}$ cm $A = 0{,}5 \cdot c \cdot h$ $A = 0{,}5 \cdot 8\text{cm} \cdot 2\sqrt{3}\text{cm}$ $A = 8\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

3) Geometrische Körper

Prisma Bei einem geraden n-seitigen Prisma sind die Grund- und Deckfläche kongruent, die Seitenflächen dazu sind senkrechte Rechtecke. Mantelfläche: $M_P = u_n \cdot h$ (u_n: Umfang des n-Ecks; h: Höhe des Prismas) $O_P = 2 \cdot G_P + M_P$	Ein reguläres Prisma hat als Grundfläche ein reguläres 6-Eck mit der Seitenlänge a. Die Höhe der Vase ist h; berechne die Oberfläche dieses Prismas: $G_P = 6 \cdot A_{Dreieck}$ $G_P = 6 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 1{,}5\sqrt{3} \cdot a^2$ $M_P = a \cdot h$ $O_P = 2 \cdot 1{,}5\sqrt{3} \cdot a^2 + 6 \cdot a \cdot h$ $O_P = 3\sqrt{3}\,a^2 + 6 \cdot a \cdot h$
Zylinder: Ein Zylinder ist ein gerades Prisma, deren Grund- und Deckfläche ein Kreis ist. $M_Z = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$ $O_Z = 2 \cdot r \cdot \pi (r + h)$	Rotationskörper: Ein Zylinder entsteht, wenn ein Rechteck um eine Seitenkante rotiert! Ein Rechteck mit den Seitenlängen a = 5cm und b = 4 cm rotiert um die Seite a. Berechne die Oberfläche des entstandenen Zylinders. $O_Z = 2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot (4 + 5)\,cm^2$ $O_Z = 72\,\pi\ cm^2 = 226{,}2\ cm^2$
Pyramide: Die **Grundfläche** der Pyramide ist ein n-Eck und die **Seitenflächen** sind Dreiecke mit alle die **Spitze** der Pyramide gemeinsam haben. Die Dreiecke bilden zusammen die Mantelfläche, der Abstand der **Spitze** von der Grundfläche heißt **Höhe.** Nur bei einer geraden Pyramide sind die Seitenkanten alle gleich lang. $O_{Py} = G_{Py} + M_{Py}$	Hinweis: Mit Hilfe von Stützdreiecken kann man Längen berechnen (siehe 2) Pythagoras) Eine Pyramide ABCDS hat ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge a = 5 cm als Grundfläche; die Spitze S befindet sich senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M des Quadrats. Die Höhe der Pyramide h_p = 6 cm. Berechne die Länge der Seitenkante s der Pyramide und die Oberfläche! 1. Diagonalenlänge d der Grundfläche ABCD berechnen: $d^2 = 25+25 \Rightarrow d = 5\sqrt{2}$ cm 2. Im Dreieck AMS kann die Seitenkante s berechnet werden: $s^2 = (0{,}5d)^2 + h_p^2 \Rightarrow s = 0{,}5\sqrt{194}$ cm

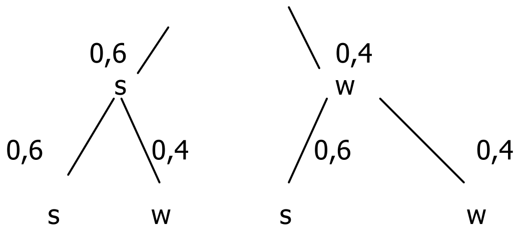
	3. Höhe h_a eines Seitendreiecks (z.B. ABS) berechnen: $h_a = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ h_a = 6,5 cm 4. Seitenfläche des Dreiecks ABS: A = $0{,}5 \cdot 6{,}5cm \cdot 5cm$ A = 16,25 cm^2 5. Oberfläche der Pyramide: O= 25 cm^2 + 4 $\cdot 16{,}25cm^2$ O= 90 cm^2
<u>(Gerader) Kreiskegel:</u> Er entsteht durch die Rotation eines rechtwinkligen Dreiecks um eine seiner Katheten. Mantellinie: m = $\sqrt{r^2 + h^2}$ Mantelfläche: sie entsteht, wenn ein gerader Kegel in die Ebene abgerollt wird. $M_K = \pi \cdot r \cdot m$ $O_K = \pi \cdot r^2 + r \cdot \pi \cdot m = \pi r \cdot (r + m)$	Ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypothenuse c = 5 cm, rotiert um die Kathete a = 3 cm. Berechne die Mantellinie m, sowie die Oberfläche des Kegels: 1. Radius ist die zweite Kathete b: b = $\sqrt{c^2 - a^2}$ b = $\sqrt{5^2 - 3^2}$ b = 4 cm 2. Mantellinie m: m = c = Hyphothenuse 3. Mantelfläche: $M_K = \pi \cdot r \cdot m$ $M_K = \pi \cdot 4cm \cdot 5cm = 20\,\pi cm^2$ 4. Oberfläche des Kegels: O_K = 4 cm $\cdot \pi(4cm + 5cm)$ $O_K = 36\,\pi cm^2 = 113{,}1\ cm^2$

4) Quadratische Funktionen

Normalparabel: $f(x) = x^2$ mit S(0| 0) als Scheitelpunkt Normalform: $f(x) = ax^2 + bx + c$	
Von der Normalform zur Scheitelform gelangt man mit Hilfe der quadratischen Ergänzung.	$f(x) = 2x^2 + 4x + 6$ $f(x) = 2(x^2 + 2x + 3)$ $f(x) = 2(x^2 + 2 \cdot 1x + 1^2 - 1^2 + 3)$ $f(x) = 2[(x+1)^2 + 2]$ $f(x) = 2(x+1)^2 + 4$ => S(-1 | 4)
Scheitelform: $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_s$ a: Öffnungsfaktor a > 0 nach oben geöffnet a < 0 nach unten geöffnet Scheitel $(x_S\| y_S)$	
Von der Scheitelform zur Normalform gelangt mit durch Ausmultiplizieren.	$g(x) = 3(x+3)^2 - 9$ $g(x) = 3(x^2 + 6x + 9) - 9$ $g(x) = 3x^2 + 18x + 36$
Faktorisierte Form/Nullstellenform: $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ wobei x_1 und x_2 die Nullstellen der Parabel sind.	Eine Parabel mit dem Öffnungsfaktor -3 habe die Nullstellen -4 und -0,5; gib die Gleichung der Parabel an: $f(x) = -3(x+4)(x+0{,}5)$
Binomische Formeln: 1. Binom (Plusformel): $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$
2. Binom (Minusformel) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(0{,}5y - 9)^2 = 0{,}25y^2 - 9y + 81$
3. Binom (Plus-Minus-Formel) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$(x+3)(x-3) = x^2 - 9$
Lösen von quadratischen Gleichungen: Jede Gleichung, die sich durch Äquivalenzumformungen auf die Form $0 = ax^2 + bx + c$ bringen lässt, heißt quadratische Gleichung. Die Lösungen dieser Gleichung sind die Nullstellen der Parabel $ax^2 + bx + c$; dabei werden die folgenden Fälle unterschieden: I. es gibt keine Nullstelle II. es gibt genau eine Nullstelle III. es gibt zwei Nullstellen.	Der Graph der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist eine Parabel. *Anschauliche Lösung* I. Die Parabel ist nach oben geöffnet und der Scheitelpunkt liegt oberhalb der x-Achse bzw. die Parabel ist nach unten geöffnet und S liegt unterhalb der x-Achse II. Der Scheitelpunkt liegt auf der x-Achse S(x| 0) III. Die Parabel ist nach oben geöffnet und S liegt unterhalb der x-Achse bzw. die Parabel ist nach

	unten geöffnet und S liegt oberhalb der x-Achse.
Rechnerische Lösung a) reinquadratische Gleichungen: $y = ax^2 + c$	a) $0 = 3x^2 - 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$ und $x_2 = -1$
b) gemischtquadratische Gleichungen: $0 = ax^2 + bx + c$ I. Möglichkeit: Quadratische Ergänzung II. Möglichkeit: Mitternachtsformel $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ wobei $D = b^2 - 4ac$ die Diskriminante ist.	b) $2x^2 + 3x + 1 = 0$ $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$ $x_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{4}$ $x_1 = -1$ und $x_2 = -0{,}5$
Falls die Diskriminante $D > 0$, hat die Gleichung zwei Lösungen	Geometrische Interpretation: Die Parabel schneidet genau zwei Mal die x-Achse
Falls $D = 0$, gibt es genau eine Lösung	Der Scheitelpunkt liegt auf der x-Achse (eine doppelte Nullstelle).
Falls $D < 0$, gibt es keine Lösung	Die Parabel schneidet nicht die x-Achse.
Alternative: Quadratische Ergänzung!	
c) Konstanter Faktor fehlt: Faktorisieren um die Nullstellen abzulesen $0 = ax^2 + bx$	c) $0 = 2x^2 + 4x$ $0 = 2x(x+2)$ $\Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = -2$

5) Zusammengesetze Zufallsexperimente

Baumdiagramme und Pfadregeln: 1. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeiten eines Ereignisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades, der zu diesem Ereignis führt.	Beispiel: In einer Urne befinden sich 10 Kugeln, von denen 6 schwarz und 4 weiß sind. Es wird 2 - mal **mit** zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei gleichfarbige Kugeln gezogen wurden?
2. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe aller Pfadwahrscheinlichkeiten, die zu diesem Ereignis gehören.	
Knotenregel: Alle Wahrscheinlichkeiten an den Ästen, die von einem Knoten ausgehen ergibt in der Summe immer 1.	$P(\{ss; ww\}) = 0{,}6^2 + 0{,}4^2 = 0{,}52 = 52\%$

6) Trigonometrie

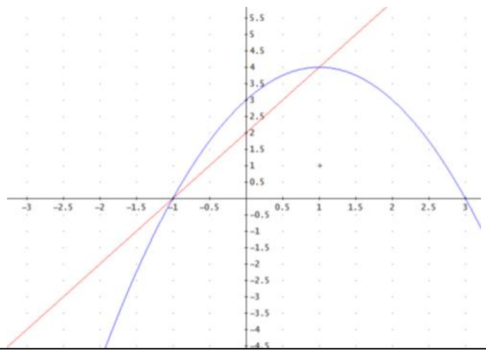
Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck: *Bezeichnung:* Die dem spitzen Winkel α gegenüberliegende Seite heißt Gegenkathete, die am spitzen Winkel α anliegende Seite ist die Ankathete.	
$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ oder Für alle Winkel α mit $0° \leq \alpha < 90°$ gilt: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit der Hypothenusenlänge c = 5 cm ist die Kathete a = 3 cm lang. Berechne die fehlende Seite b sowie alle Innenwinkel des Dreiecks ABC! b= $\sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25-9} = 4cm$ $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{4cm}{5cm} = 0{,}8 \Rightarrow \alpha = 36{,}9°$ oder $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{3cm}{5cm} = 0{,}6 \Rightarrow \alpha = 36{,}9°$ $\gamma = 90° \Rightarrow \beta = 180° - 90° - 36{,}9° = 53{,}1°$
Trigonometrischer Pythagoras: $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$ Komplementbezeichnungen: sin α = cos (90° - α) cos α = sin (90° - α)	Vereinfache den folgenden Rechenausdruck: $(\sin\alpha)^3 + \sin\alpha \cdot (\cos\alpha)^2 =$ $\sin\alpha \cdot \left[(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2\right] =$ $\sin\alpha \cdot 1 =$ $\sin\alpha$ sin 60° = cos (90°-60°) = cos 30° cos 50° = sin (90° - 50°) = sin 40°

	0°	30°	45°	60°	90°
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosα	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tanα	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.

7) Volumen von Prisma und Zylinder

Volumen von Prisma und Zylinder: $V_{Prisma} = G_P \cdot h$ $V_{Zylinder} = G_Z \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$	Ein Zylinder mit dem Radius 3,0 cm hat ein Volumen von 30 cm^3; berechne die Höhe des Zylinders. $V_{Zylinder} = G_Z \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$ $h = \frac{V}{\pi \cdot r^2} = \frac{30cm^3}{\pi \cdot (3\,cm)^2} = 1{,}1cm$
Volumen von Pyramide und Kegel: $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G_{Py} \cdot h$ $V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot G_K \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$	Ein gerader Kreiskegel hat einen Radius r von 5 dm und eine Höhe von 7 dm. Berechne sein Volumen. $V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$ $V = \frac{1}{3} \cdot (5\,dm)^2 \cdot \pi \cdot 7dm = 58\frac{1}{3}\,\pi\,dm^3$

8) Quadratische Funktionen und ihre Anwendungen/Erweiterung des Potenzbegriffs

Schnittpunkte von Graphen Algebraische Lösung - Funktionsterme zweier Graphen werden gleichgesetzt - Auflösen nach x (Achtung x ∊ D) - Schnittpunkte: hier ist die dazu passende y-Koordinaten noch zu berechnen	Berechne den Schnittpunkt der Geraden g: y = 2x+2 und der Parabel p: y = $-x^2$ +2x+3 1. Terme gleichsetzen: $-x^2+2x+3 = 2x+2$ 2. Alles auf eine Seite - Nullstellen berechnen $0 = x^2-1$ $1 = x^2$ $x_{1,2} = \pm 1$ 3. Schnittpunkte angeben: $y_1 = 2 \cdot 1 + 2 = 3$ => $S_1(1 \mid 3)$ $y_2 = 2(\cdot -1) + 2 = 0$ => $S_2(-1 \mid 0)$
Graphische Lösung: Die Graphen beider Funktionen sind in ein Koordinatensystem zu zeichnen und die Schnittpunkte können abgelesen werden.	Beide Graphen in ein Koordinatensystem einzeichnen und Schnittpunkt ablesen! 

Extremwertprobleme: Typische Fragestellungen: "für welche Belegung von x wird die Fläche maximal?" oder "für welches x ist der Abstand am kleinsten?" ... ist der Term eine quadratische Funktion, ist bei diesen Aufgaben stets der Scheitelpunkt gefragt!	
Potenzen mit rationalen Exponenten: Unter der n-ten Wurzel (n∈N) versteht man diejenige nicht-negative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt. $x^n = a$ $\Rightarrow x = \sqrt[n]{a}$ Schreibweise: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ Potenzgesetze: *(1) - (3): Gleiche Basis* (1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ (2) $a^x : a^y = a^{x-y}$ (3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ *(4) und (5) gleicher Exponent:* (4) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$ (5) $a^x : b^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ Anmerkung: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ für alle $a \geq 0$	Löse die folgende Gleichung: $x^3 = 8$ $x = \sqrt[3]{8} = 2$ (1) $3^4 \cdot 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$ (2) $3^8 : 3^3 = 3^{8-3} = 3^5$ (3) $(3^4)^5 = 3^{4 \cdot 5} = 3^{20}$ (4) $2^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 3)^4 = 6^4$ (5) $2^3 : 3^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$