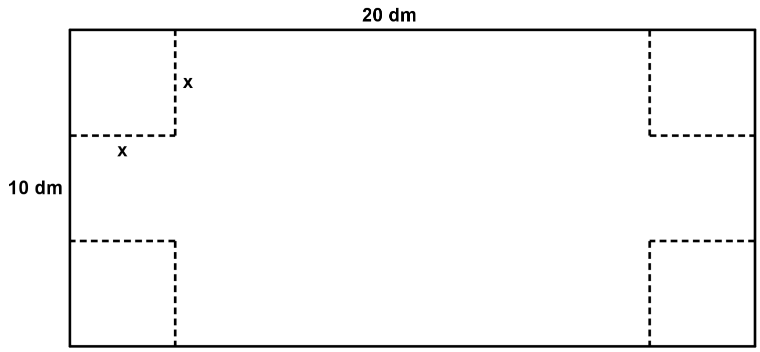
Differenzierbarkeit

Einstieg: Aus einem Papier der Länge 20 dm und der Breite 10 dm soll ein Quader mit möglichst großem Volumen hergestellt werden, indem man vier Ecken der Länge x wegschneidet.

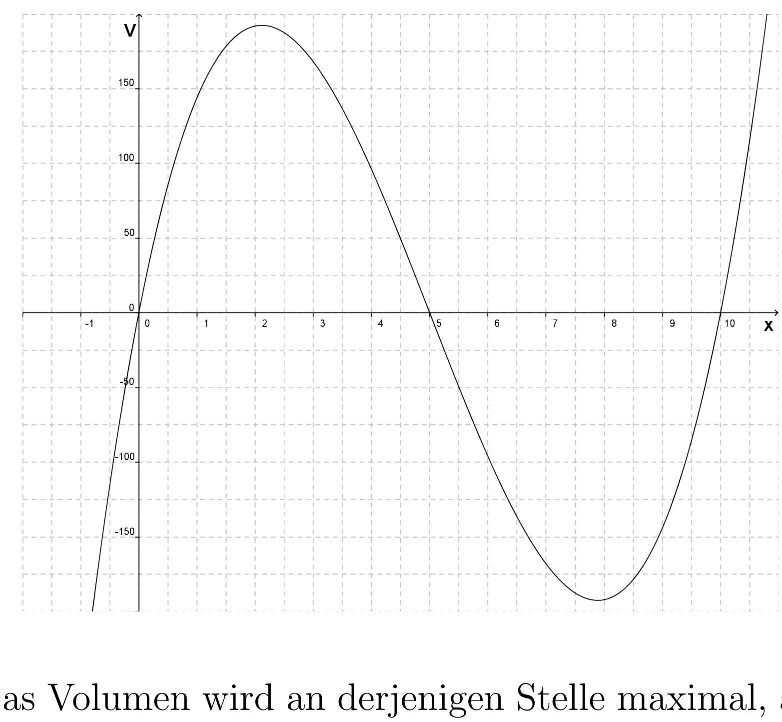


Frage: Für welches x wird das Volumen maximal?

Das Volumen des Quaders hängt wie folgt von der Länge x ab:

$$f : x \mapsto V = (20 - 2x) \cdot (10 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 60x^2 + 200x, \quad \mathbb{D}_f = [0; 5].$$

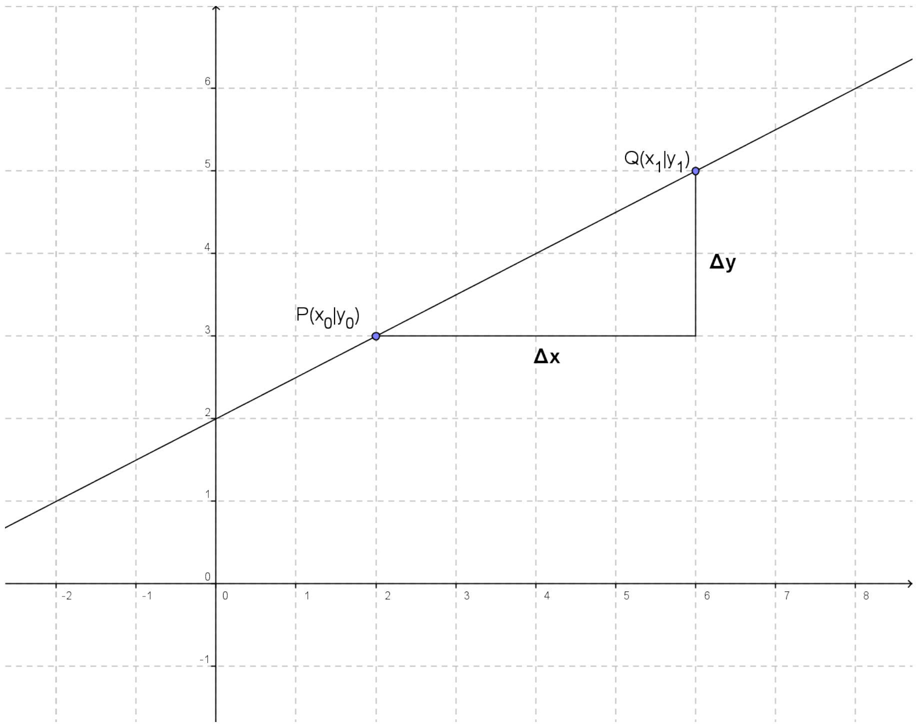
Wir veranschaulichen die Funktion durch ihren Graphen:



Vermutung: Das Volumen wird an derjenigen Stelle maximal, an der der Graph G_f ein „kurzes Stück waagerecht verläuft“.

Idee: Wir benötigen ein **Maß für die Steilheit (Steigung)** des Graphen.

Rückblick: Steigung einer Geraden



Unter der **Steigung einer Geraden** durch die Punkte

$$P(x_0|y_0) \qquad \text{und} \qquad Q(x_1|x_2)$$

versteht man den Wert des Quotienten

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

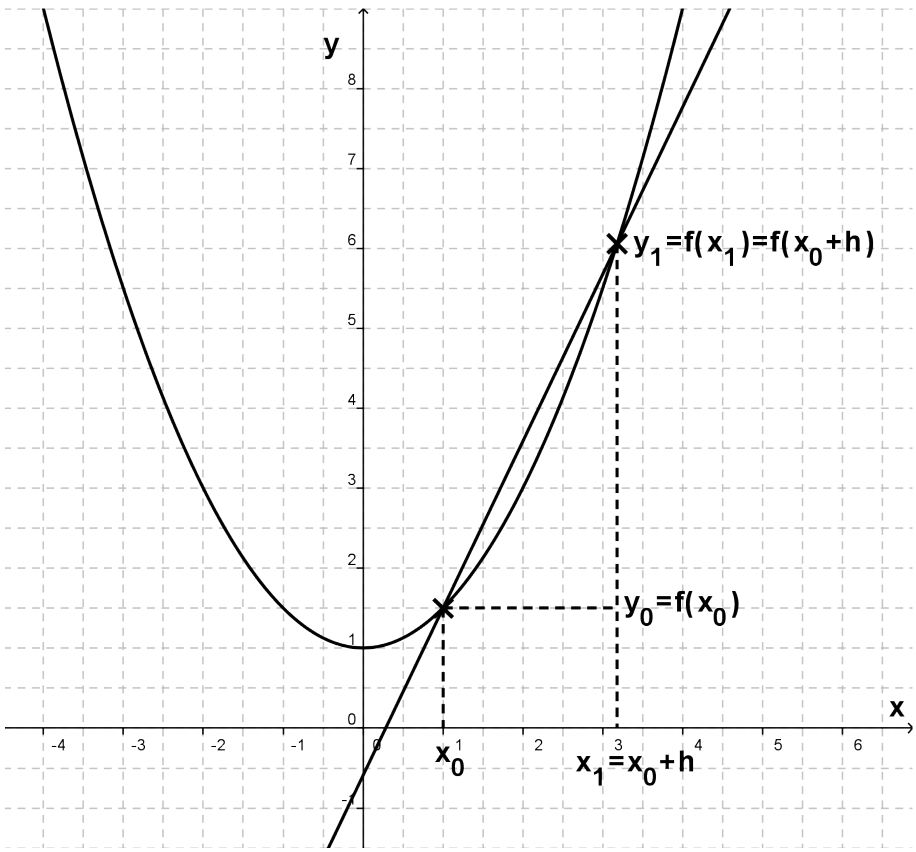
dabei muss natürlich $x_1 \neq x_0$ sein.

Steigung einer Parabel

Beispiel: $f : x \mapsto y = \frac{1}{2}x^2 + 1$

Aufgabe: Bestimme die Steigung im Punkt $P(1|1,5)$ an den Graphen G_f

Idee: *(Vgl. nächstes Bild) Probiert man per Hand eine Tangente durch P an die Parabel hinein zu zeichnen, so liegt sie in Wahrheit um „Haaresbreite“ daneben. Man erhält also eine Gerade, die die Parabel zweimal schneidet, d.h. eine* ***Sekante****. Von der Sekante können wir die Steigung berechnen.*



Steigung der Sekante durch P und Q:

$$
\begin{aligned}
m_{Sek} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \\
&= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \\
&= \frac{[\frac{1}{2}(x_0 + h)^2 + 1] - [\frac{1}{2}x_0^2 + 1]}{h} = \\
&= \frac{\frac{1}{2}(x_0^2 + 2x_0h + h^2) + 1 - \frac{1}{2}x_0^2 - 1}{h} = \\
&= \frac{\frac{1}{2}x_0^2 + x_0h + \frac{1}{2}h^2 + 1 - \frac{1}{2}x_0^2 - 1}{h} = \\
&= \frac{x_0h + \frac{1}{2}h^2}{h} = \\
&= x_0 + \frac{1}{2}h
\end{aligned}
$$

Damit wir nicht mehr um „h-resbreite“ neben der Tangente liegen, soll h ganz klein werden, d.h. gegen Null gehen:

$$\lim_{h \to 0} x_0 + \frac{1}{2}h = x_0,$$

d.h. im Punkt$P(1|1,5)$ haben wir wegen $x_0 = 1$ dann die Tangentensteigung 1.

Die Steigung des Graphen G_f im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ ist die Steigung der Tangente in P an den Graphen G_f und berechnet sich mittels

$$\boxed{m_{x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}\ .$$

Eine Funktion $f : x \mapsto y = f(x)$ heißt **in x_0 differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert.

Ist die Funktion f für alle $x \in \mathbb{D}_f$ differenzierbar, dann heißt die aus f abgeleitete Funktion

$$\boxed{f' : x \mapsto y = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}}$$

die **Ableitungsfunktion** (oder kurz: die **Ableitung**) von f. Das Bestimmen von f' aus f heißt **ableiten** (oder **differenzieren**). $f'(x_0)$ heißt **Ableitung an der Stelle x_0**.