Berechnen von Winkeln zwischen zwei Vektoren: Skalarprodukt

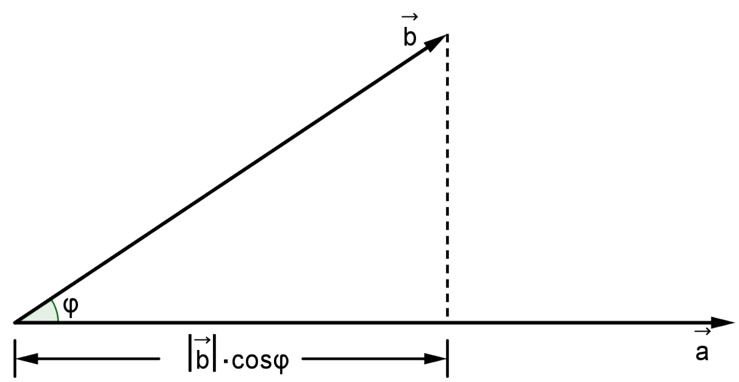
Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren

Unter dem Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{b}$ der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ versteht man folgende reelle Zahl (Skalar):

$$\boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi.}$$

Dabei ist φ der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel.

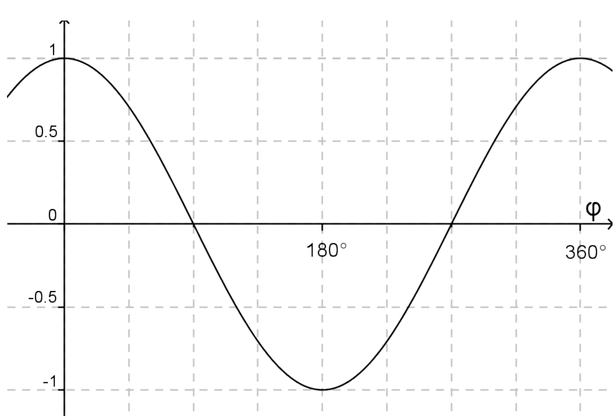
Veranschaulichung:



Wichtige Eigenschaften:

1. Wie entscheide ich, welches der **eingeschlossene Winkel** ist?

   Betrachte dazu den Graphen der Cosinusfunktion:

   Wir sehen: Ist $\varphi \in [0°; 180°]$ irgendein Winkel, so ist $\cos\varphi = \cos(360° - \varphi)$. Es ist also egal, welchen Winkel man nimmt.

2. Es gilt das Kommutativgesetz:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}.$$

Beweis: $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos\varphi = \vec{b} \circ \vec{a}$.

3. Reelle Zahlen dürfen wir „rausziehen“:

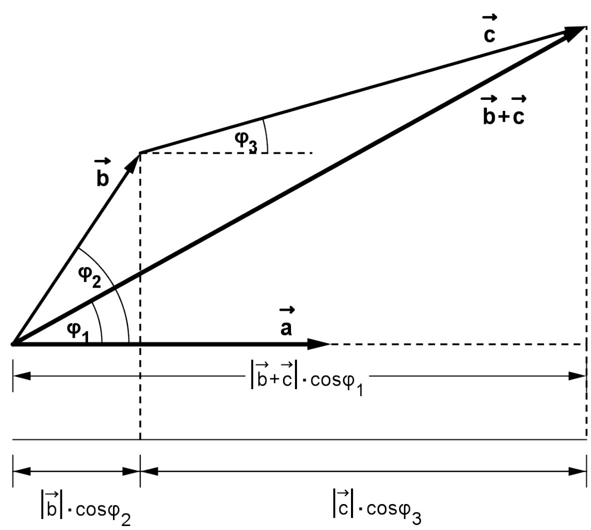
$$(\lambda \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) = \vec{a} \circ (\lambda \cdot \vec{b}); \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Beweis: $(\lambda \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = |\lambda \cdot \vec{a}| \cdot \vec{b} \cdot \cos\varphi = |\lambda| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$.

4. Es gilt das Distributivgesetz:

$$\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{b}.$$

Beweis: Nur für den Spezialfall, dass $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar sind (d. h. in einer Ebene liegen):



Wie können wir nun mit Hilfe des Skalarproduktes den Innenwinkel zwischen zwei Vektoren ausrechnen?

Seien

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben nun

$$\vec{a} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um nicht so viel schreiben zu müssen, nennen wir die „Einheitsvektoren“

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\vec{a} \circ \vec{b} = (a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3) \circ (b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2 + b_3 \cdot \vec{e}_3).$$

Wenden wir die Rechenregeln 2., 3. und 4. mehrfach an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{b} &= a_1 b_1 \cdot \vec{e}_1 \circ \vec{e}_1 + a_2 b_2 \cdot \vec{e}_2 \circ \vec{e}_2 + a_3 b_3 \cdot \vec{e}_3 \circ \vec{e}_3 \\ &\quad + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot \vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 + (a_1 b_3 + a_3 b_1) \cdot \vec{e}_1 \circ \vec{e}_3 + (a_2 b_3 + a_3 b_2) \cdot \vec{e}_2 \circ \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Im Kartesischen Koordinatensystem stehen die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ alle senkrecht aufeinander und haben die Länge 1. Das macht das Ganze viel einfacher, denn wir erhalten somit:

$$\boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.}$$

Berechnen von Winkeln zwischen zwei Vektoren

Wir haben

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

und

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Also gilt:

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

und somit für den Cosinus des Winkels zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}}$$

bzw. mit den Längen der Vektoren:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.}$$

Beispiel:

In einem kartesischen KOSY legen die Punkte $A(1|4|0)$, $B(3|2|0)$ und $C(-2|-5|0)$ ein Dreieck in einer Ebene fest. Berechne den Innenwinkel zwischen den Strecken [AB] und [AC].

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{2 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-9) + 0 \cdot 0}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2 + 0^2}} \approx 0,447$$

Daraus folgt:

$$\varphi = \cos^{-1}(0,447) \approx 63,4$$