Stochastik

1. Stochastische Unabhängigkeit

1. Einstiegsbeispiel:
Heute sind **6** Buben und **6** Mädchen im Abitrainingskurs. **7** Schüler sind mit dem Auto gekommen, darunter **4** Buben.

FRAGE: Hat das Geschlecht einen Einfluss auf die Wahl des Verkehrsmittel?

MIT ANDEREN WORTEN: Ist der Anteil der Autofahrer in der Buben-Gruppe gleich dem Anteil der Autofahrer in der Mädchen-Gruppe? Falls ja, so ist die Wahl des Verkehrsmittels unabhängig vom Geschlecht.

Lösung:
Wir veranschaulichen uns die Situation mittels einer **4-Felder-Tafel**.
B: Buben; M: Mädchen; A: Autofahrer; $\overline{A}$: kein Autofahrer
Die Zahlen, die direkt aus der Angabe ablesbar sind, sind in der 4-Felder-Tafel fett gedruckt.

	B	M	
A	**4**	3	**7**
$\overline{A}$	2	3	5
	6	**6**	12

Anteil der Autofahrer **unter** den Buben: $P_B(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Anteil der Autofahrer **unter** den Mädchen: $P_M(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Der Anteil der Autofahrer unter den Buben ist ungleich dem Anteil der Autofahrer unter den Mädchen. Also ist die Wahl des Verkehrsmittels **abhängig** vom Geschlecht.

Kleine Erinnerung: In der 4-Felder Tafel stehen die Anzahlen der folgenden Ereignisse

	B	M	
A	$B \cap A$	$M \cap A$	A
$\overline{A}$	$B \cap \overline{A}$	$M \cap \overline{A}$	$\overline{A}$
	B	M	

Dabei ist $B \cap A$ („B geschnitten A“) das Ereignis, das B **und** A eintreffen (Bub und Autofahrer).

2. Einstiegsbeispiel:
In einer anderen Klasse ergab die selbe Umfrage folgende 4-Felder-Tafel.

	B	M	
A	4	3	7
$\overline{A}$	8	6	14
	12	9	21

Anteil der Autofahrer **unter** den Buben: $P_B(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Anteil der Autofahrer **unter** den Mädchen: $P_M(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Hier ist der Anteil der Autofahrer unter den Buben gleich dem Anteil der Autofahrer unter den Mädchen. Also ist hier die Wahl des Verkehrsmittels **unabhängig** vom Geschlecht.

Folgerung: Ist der Anteil der Autofahrer unter den Buben gleich dem Anteil der Autofahrer unter den Mädchen, so ist dies genau der Anteil der Autofahrer der gesamten Klasse (nämlich 7/21):

$$P_B(A) = P_M(A) = P(A)$$

Da nach Definition für die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P_M(A) = \frac{P(M \cap A)}{P(M)}$$

gilt (vgl. 10. Klasse), so folgt wegen $P_M(A) = P(A)$ schließlich

$$\frac{P(M \cap A)}{P(M)} = P(A)$$

$$P(M \cap A) = P(M) \cdot P(A) \quad .$$

> **Merke:**
> Zwei Ereignisse M und A sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn
> $$P(M \cap A) = P(M) \cdot P(A)$$
> gilt.

Anwendung auf die oberen zwei Beispiele:

Beispiel 1:

$$P(M \cap A) = \frac{3}{12}$$

$$P(M) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = \frac{7}{12}$$

Also: $P(M \cap A) \neq P(M) \cdot P(A)$

Die Ereignisse M und A sind stochastisch abhängig.

Beispiel 2:

$$P(M \cap A) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

$$P(M) = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

$$P(A) = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

Also: $P(M \cap A) = P(M) \cdot P(A)$

Die Ereignisse M und A sind stochastisch unabhängig.

Aufgaben zur Stochastischen Unabhängigkeit

Aufgabe 1.

Die Titelrolle der Aida wird von einer gefeierten Diva gesungen, deren Treffsicherheit (auch bei den höchsten Tönen) bei 95% liegt.
Bedauerlicherweise ist ihr Gesangspartner Radames heute ziemlich indisponiert, so dass dessen Quote für unsaubere Töne bei 20% liegt. Beim Schlussduett sind 25% der gemeinsam gesungenen Töne nicht obtimal, weil entweder Aida oder Radames oder beide unsauber singen.
Hat somit die Schwäche des Radames einen Einfluss auf die Qualität der Aida-Sängerin?

Aufgabe 2.

Birgit und Christine besuchen das Oktoberfest und versuchen ihr Glück an einer Schießbude. Sie schießen unabhängig voneinander jeweils einmal. Birgit trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 40%, Christine mit einer Wahrscheinlichkeit von 70%.

Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
a) keine von beiden trifft,
b) genau einer der beiden trifft,
c) mindestens eine der beiden trifft.

Aufgabe 3.

Mit einem Laplace-Tetraeder, das auf seinen Flächen die Zahlen 1, 2, 3 und 4 trägt, wird zweimal geworfen. (Es gilt die Zahl als geworfen, die auf der unten liegenden Fläche steht). Folgende Ereignisse sind definiert:

A = >> Das Ergebnis, des 1. Wurfs ist kleiner als 3 und der 2. Wurf liefert eine ungerade Zahl. <<
B = >> Die Summe der Augenzahlen aus beiden Würfen ist ungerade.<<

a) Gib einen geeigneten Ergebnisraum Ω an!
b) Gib A und B explizit als Teilmengen von Ω an!
c) Prüfe durch Rechnung, ob A und B unabhängig sind!